Signali, spektralna analiza signala i sistemi prenosa

Prof.dr Igor Radusinović

igorr@ucg.ac.me

Prof.dr Enis Kočan

enisk@ucg.ac.me

dr Slavica Tomović

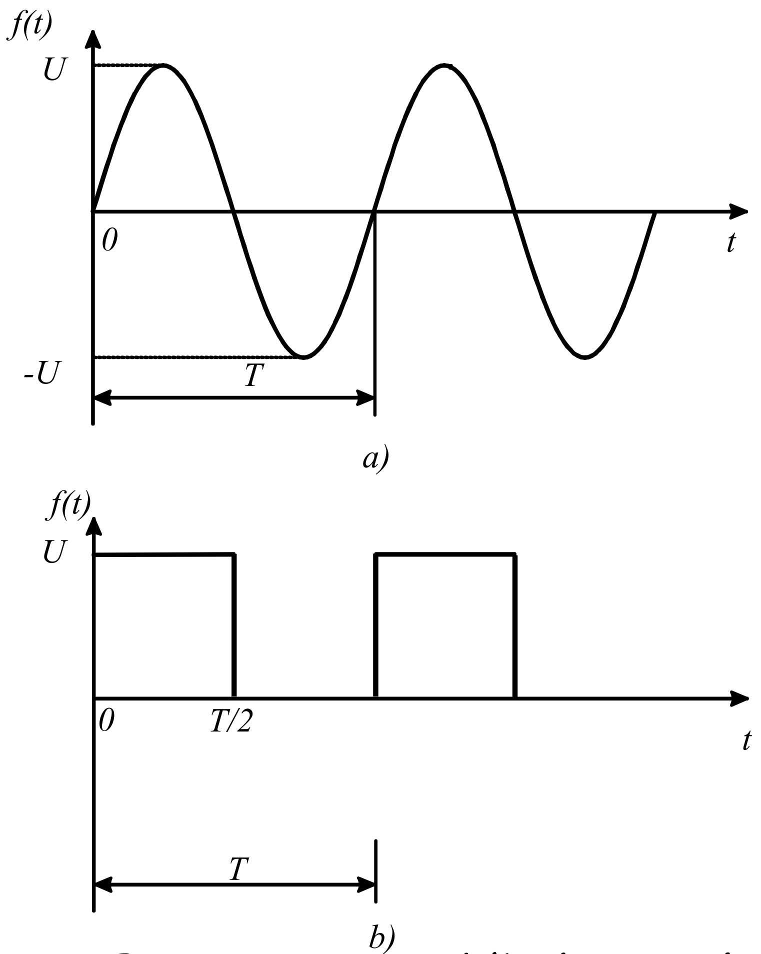
slavicat@ucg.ac.me

Signali, sistemi i spektralna analiza signala

Sadržaj

- Harmonijska analiza periodičnih signala
- Spektralna analiza aperiodičnih signala
- Analiza slučajnih signala
- Prenos signala
- Sistemi prenosa signala

Harmonijska analiza periodičnih signala



Primjeri periodičnih signala:
a) sinusoidalni signal;
b) povorka pravougaonih impulsa

- U ispitivanju osobina determinističkih signala koristi se **harmonijska analiza**.
- Harmonijska analiza ima za cilj da prikaže signal u domenu učestanosti, a zasniva se na teoriji Fourrierovih redova i Fourrierove transformacije.
- Za periodične signale se primjenjuje analiza pomoću ***Fourrierovih redova***, a za aperiodične ***Fourrierova transformacija***.

Šta je učestanost?

Harmonijska analiza periodičnog signala

Da bi se periodična funkcija razvila u Fourrier-ov red mora biti zadovoljen **Dirichlet-ov uslov**:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)| dt < \infty$$

Šta ovo fizički znači?

Fourrier-ov red tada može imati jedan od sledećih oblika:

1. Trigonometrijski oblik 1

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t),$$

Šta ovo fizički znači?

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

- $T=2\pi/\omega_0$ je *perioda*,
- $\omega_0=2\pi f_0$ *osnovna kružna učestanost*,
- a_n i b_n *Fourrierovi koeficijenti*,
- f_0 *osnovna učestanost*.

Kako glasi veza između periode i osnovne učestanosti?

Harmonijska analiza periodičnog signala

1. Trigonometrijski oblik 2

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n),$$

- C_n predstavlja amplitudu n-tog harmonika signala f(t),
- θn predstavlja fazu n-tog harmonika signala f(t)

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \qquad \theta_n = arctg\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

2. Kompleksni oblik

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t},$$

Kako je:

$$\cos n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}, \quad \sin n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}$$

to je:

$$F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = |F_n| e^{j\theta_n}$$

$$|F_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} C_n$$

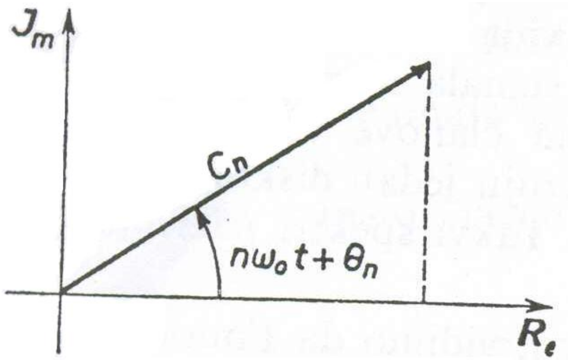
$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

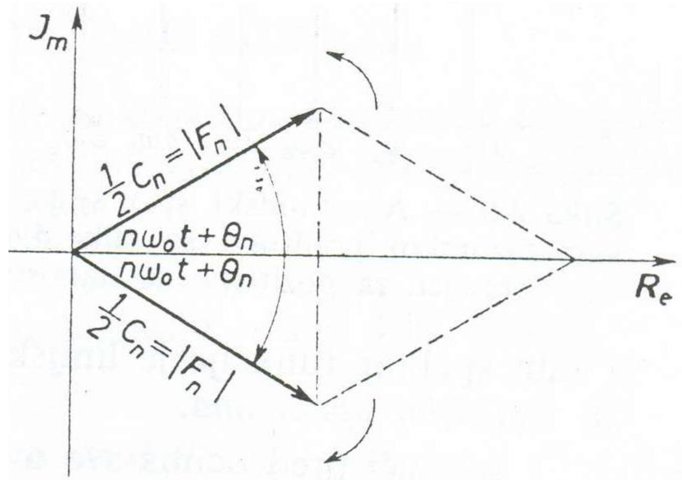
Harmonijska analiza periodičnog signala

Negativne učestanosti?

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}, \qquad F_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \qquad F_n = |F_n| e^{j\theta_n}$$

- Fourrierova transformacija F_n naziva se još i ***kompleksnim spektrom*** funkcije $f(t)$.
- $|F_n|$ se naziva ***amplitudskim***, a njen argument θ_n ***faznim spektar*** funkcije $f(t)$.
- Fazorska predstava

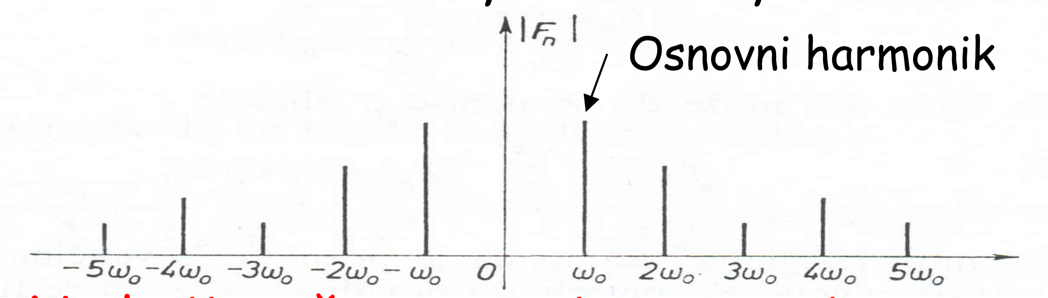




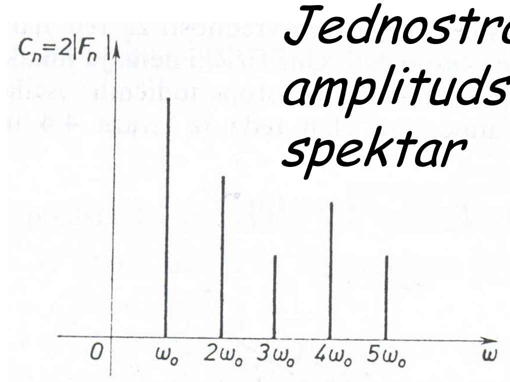
Harmonijska analiza periodičnog signala

- Uobičajeno je da se vrši grafičko prikazivanje signala u domenu frekvencija, i to posebno amplitudskog i faznog spektra. Postoje dva načina:
  1. i za pozitivne i negativne učestanosti (dvostrani spektar)
  2. samo za pozitivne učestanosti, s tim što je amplituda odgovarajućeg harmonika 2 puta veća (jednostrani spektar).
- Kompleksni spektri periodičnih signala su diskretni, pa se nazivaju ***diskretnim*** ili ***linijskim*** spektrima.

Dvostrani amplitudski spektar

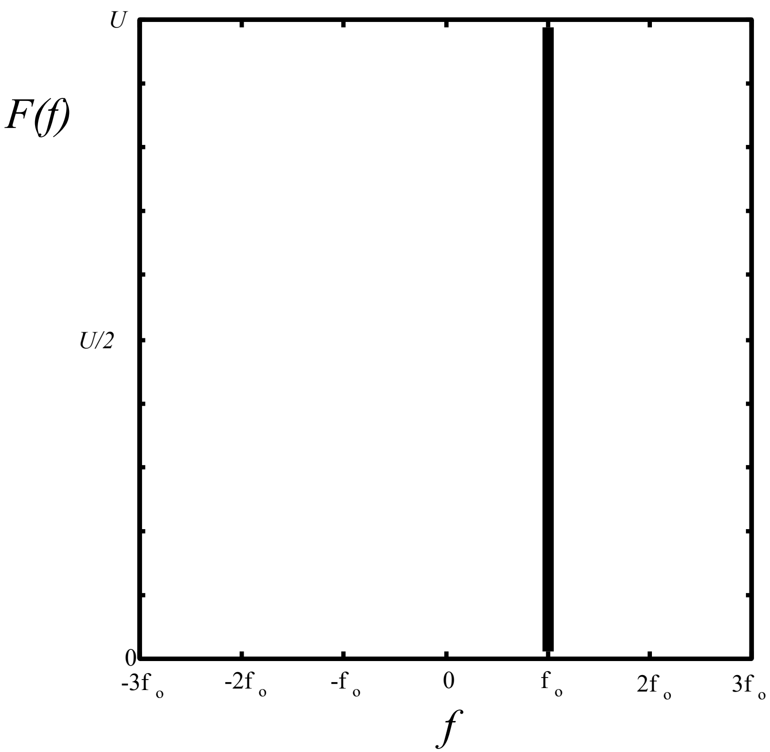


Jednostrani amplitudski spektar

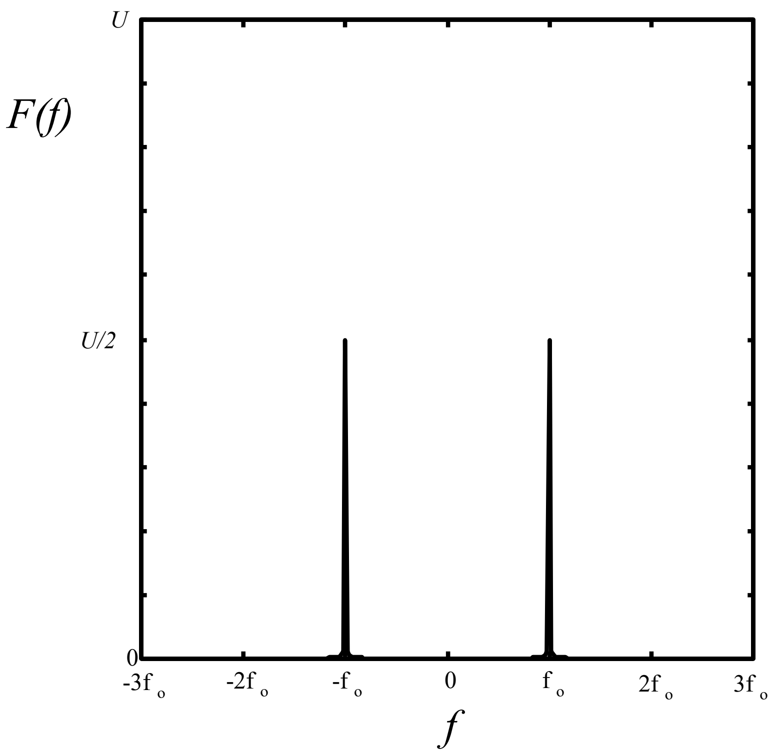


Na kojim učestanostima postoje spektralne komponente?

Harmonijska analiza periodičnog signala



Jednostrani amplitudski spektar prostoperiodičnog signala učestanosti f_0



Dvostrani amplitudski spektar prostoperiodičnog signala f_0

Harmonijska analiza periodičnog signala

Parsevalova teorema

- Bitna karakteristična veličina periodičnog signala *f*(*t*) je njegova ***efektivna vrijednost***:

$$\left[\text{Ef.vrijednost } f(t)\right] = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)dt}$$

Šta ovo fizički znači?

$$\left[\text{Ef.vrijednost } f(t)\right]^2 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}\right)dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{jn\omega_0 t}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n F_{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n F_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|F_n\right|^2$$

$$\left[\text{Ef.vrijednost } f(t)\right]^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

Harmonijska analiza periodičnog signala

Parsevalova teorema

- Poslednja relacija je poznata kao ***Parsevalova teorema*** za periodične signale:
  - Kvadrat efektivne vrijednosti brojno je jednak snazi koju taj signal razvija na otporniku od jednog oma.
  - Ukupna srednja snaga periodičnog signala jednaka je sumi snaga njegovih harmonika.

Harmonijska analiza periodičnog signala

Korelacija periodičnih signala

- U opštoj harmonijskoj analizi periodičnih signala poseban značaj ima pojam ***korelacije*** koja povezuje dva periodična signala.
- Neka su signali opisani funkcijama $f_1(t)$ i $f_2(t)$ koje imaju istu periodu $T=2\pi/\omega_0$. Fourrierove transformacije ovih funkcija su:

$$F_{n1} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$F_{n2} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_2(t)e^{-jn\omega_0 t}dt, \qquad n = 0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Harmonijska analiza periodičnog signala

Korelacija periodičnih signala

- Njihova korelacije se definiše na sledeći način:

$$R_{12}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) f_2(t+\tau) dt, \qquad -\infty<\tau<\infty$$

τ predstavlja kontinualni pomjeraj u vremenu u intervalu od $-\infty$ do ∞, pri čemu τ ne zavisi od t.

Traženje korelacije dva signala podrazumijeva tri koraka:

1. Pomjeranje jedne od funkcija u vremenu za τ
2. Množenje te pomjerene funkcije drugom funkcijom iste periode
3. Izračunavanje srednje vrijednosti tog proizvoda u toku jedne periode

Harmonijska analiza periodičnog signala

Teorema o korelaciji

$$R_{12}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t)f_2(t+\tau)dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_{n2}e^{jn\omega_0(t+\tau)}\right)dt=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_{n2}e^{jn\omega_0\tau}\,\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t)e^{jn\omega_0 t}dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_{n1}^{*}F_{n2}e^{jn\omega_0\tau}$$

Funkcija $R_{12}(\tau)$ je periodična funkcija po τ, sa periodom $T=2\pi/\omega_0$. Njen kompleksni spektar je proizvod $F_{n1}^{*}F_{n2}$. Stoga važi:

$$F_{n1}^{*}F_{n2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_{12}(\tau)e^{-jn\omega_0\tau}d\tau$$

$R_{12}(\tau)$ i $F_{n1}^{*}F_{n2}$ obrazuju Fourrierov transformacioni par. Ovaj stav se naziva ***teoremom o korelaciji*** periodičnih funkcija. Uvedena funkcija $R_{12}(\tau)$ se naziva ***korelaciona funkcija (unakrsna korelacija).***

Harmonijska analiza periodičnog signala

Autokorelaciona funkcija i spektar snage

- Interesantno je posmatrati specijalan slučaj korelacije dva identična signala $f_1(t)=f_2(t)=f(t)$.

$$R_{11}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)f(t+\tau)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n^* F_n e^{jn\omega_0\tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|F_n\right|^2 e^{jn\omega_0\tau}$$

Ovako definisana korelaciona funkcija se naziva ***autokorelaciona funkcija***.

Njena vrijednost za $\tau=0$ je:

$$R_{11}(0)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|F_n\right|^2$$

Ovo je analitički izraz za **Parsevalovu teoremu**.

- Kako je $|F_n|^2$ snaga *n*-tog harmonika na jediničnom otporniku, veličina

$$S_{11}(n\omega_0)=\left|F_n\right|^2$$

Šta ovo znači?

se naziva ***spektar snage*** signala $f(t)$.

Harmonijska analiza periodičnog signala

Teorema o autokorelaciji

- Shodno prethodnim izrazima, dobija se:

$$R_{11}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{11}(n\omega_0) e^{jn\omega_0 \tau}$$

odnosno:

$$S_{11}(n\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_{11}(\tau) e^{-jn\omega_0 \tau} d\tau$$

- Autokorelaciona funkcija $R_{11}(\tau)$ i spektar snage $S_{11}(n\omega_0)$ funkcije $f(t)$ čine Fourrierov transformacioni par.

- Ovaj stav se naziva teorema o autokorelaciji periodičnih funkcija.

Harmonijska analiza periodičnog signala

Osobine autokorelacione funkcije

1. Iz izraza za spektar snage $S_{11}(n\omega_0)$ vidi se da ne zavisi od početnog faznog stava pojedinih harmonika. Pošto je $S_{11}(n\omega_0)$ istovremeno i kompleksni spektar autokorelacione funkcije $R_{11}(\tau)$, to znači da *sve periodične funkcije koje imaju iste amplitude harmonika, a međusobno se razlikuju po početnim faznim stavovima, imaju istu autokorelacionu funkciju.*
2. $R_{11}(\tau)$ je *periodična funkcija* čija je perioda jednaka periodi funkcije $f(t)$, tj. $T=2\pi/\omega_0$.
3. $R_{11}(\tau)$ je *parna funkcija*, što se lako dokazuje:

$$R_{11}(-\tau)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)f(t-\tau)dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}-\tau} f(x)f(x+\tau)dx=R_{11}(\tau)$$

Harmonijska analiza periodičnog signala

Kroskorelaciona funkcija

- Funkcija $R_{12}(\tau)$ je korelaciona funkcija, a nekada se, da bi se istaklo da je riječ o dvije periodične funkcije istih perioda, za razliku od autokorelacione funkcije, ona se naziva i ***unakrsnom (kroskorelacionom)*** funkcijom. Njen kompleksni spektar:

$$S_{12}(n\omega_0) = F_{n1}^* F_{n2}$$

se naziva spektrom ***unakrsne snage***.

- Neke osobine kroskorelacione funkcije $R_{12}(\tau)$:
  - Za kroskorelacionu funkciju bitan je redosled indeksa, tj. važi:

$$R_{12}(-\tau) = R_{21}(\tau)$$

kao i:

$$S_{21}(n\omega_0) = F_{n2}^* F_{n1} = S_{12}^*(n\omega_0)$$

- U opštem slučaju $S_{12}(n\omega_0)$ je kompleksna veličina za razliku od $S_{11}(n\omega_0)$ koja je uvijek realna veličina.

Harmonijska analiza periodičnog signala

Konvolucija periodičnih signala

- Za dva periodična signala $f_1(t)$ i $f_2(t)$ iste periode $T=2\pi/\omega_0$, integral:

$$\rho_{12}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t)f_2(\tau-t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{n1}F_{n2}e^{jn\omega_0\tau}$$

se zove **konvolucija** signala $f_1(t)$ i $f_2(t)$. Lako se pokazuje da važi:

$$F_{n1}F_{n2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \rho_{12}(\tau)e^{-jn\omega_0\tau}d\tau$$

Teorema o konvoluciji periodičnih funkcija:

- Konvolucija $\rho_{12}(\tau)$ funkcija $f_1(t)$ i $f_2(t)$ i proizvod njihovih kompleksnih spektara $F_{n1}F_{n2}$ obrazuju Fourrierov transformacioni par.

Harmonijska analiza periodičnog signala

Konvolucija periodičnih signala

Slično korelaciji i kod konvolucije postoje tri operacije:

1. Pomjeranje funkcije $f_2(t)$ u vremenu za τ i njeno preslikavanje simetrično u odnosu na ordinatnu osu
2. Množenje tako dobijene funkcije sa periodičnom funkcijom $f_1(t)$
3. Izračunavanje srednje vrijednosti tog proizvoda u toku jedne periode

Osobine konvolucije:

- Konvolucija periodičnih funkcija je periodična funkcija čija je perioda jednaka periodi signala $f_1(t)$ i $f_2(t)$, a njen kompleksni spektar je jednak proizvodu $F_{n1}F_{n2}$.

- Važi relacija:

$$\rho_{12}(\tau) = \rho_{21}(\tau)$$

Spektralna analiza aperiodičnog signala
Fourrierov integral

- Aperiodični deterministički signali mogu se opisati funkcijama koje su aperiodične u vremenskom domenu, tj. funkcijama za koje ne važi ***f*(t)=*f*(t+T)**.
- Periodična funkcija izražena Fourrierovim redom može se smatrati aperiodičnom ako njena perioda teži beskonačnosti. Dakle:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{jn\omega_0 t}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(\mu)e^{-jn\omega_0\mu}d\mu$$

Kada $T\to\infty$: $\omega_0\to d\omega$, $n\omega_0\to\omega$ i $\sum\to\int$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(\mu)e^{-j\omega\mu}d\mu$$

Ovaj izraz predstavlja ***Fourrierov integral za aperiodičnu funkciju***, pri čemu je uslov za njegovu egzistenciju:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty \quad \text{ili} \quad \int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)dt<\infty$$

Šta je ovo?

Spektralna analiza aperiodičnog signala

Spektralna gustina amplituda i faza

- Analogno predstavljanju periodične funkcije u obliku Fourrierovog reda, dobija se *Fourrierov transformacioni par za aperiodičnu funkciju* *f*(t):

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

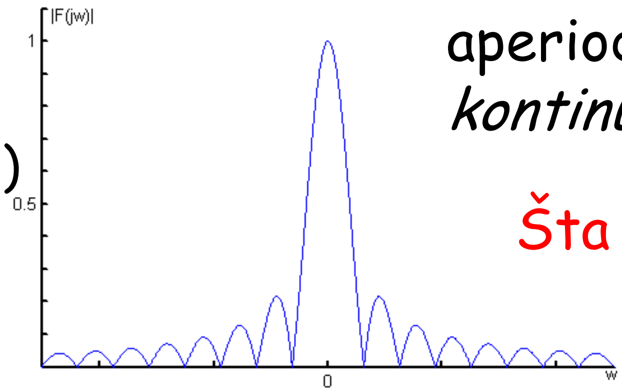
$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

F(jω) je *Fourrierova transformacija aperiodične funkcije f*(t), i ona je kontinualna funkcija učestanosti ω. Funkcija *f*(t), je *inverzna Fourrierova transformacija funkcije* F(jω).

$$F(j\omega)=\left|F(j\omega)\right|e^{j\theta(\omega)}$$

|F(jω)| - spektralna gustina amplituda aperiodičnog signala *f*(t) (uvijek parna funkcija)

θ(ω) - spektralna gustina faza aperiodičnog signala *f*(t), (uvijek neparna funkcija).



Ove dvije veličine za aperiodične funkcije su *kontinualne.*

Šta to fizički znači?

Spektralna analiza aperiodičnog signala
Korelacija aperiodičnih signala

Za dvije aperiodične funkcije $f_1(t)$ i $f_2(t)$ izraz:

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t+\tau) dt$$

se naziva ***korelacionom funkcijom*** aperiodičnih signala $f_1(t)$ i $f_2(t)$.
Korelacija dva signala podrazumijeva tri koraka:

1. Pomjeranje jedne funkcije u vremenu za τ
2. Množenje te pomjerene funkcije drugom funkcijom
3. Izračunavanje integrala proizvoda takve dvije funkcije

Neka funkcije $f_1(t)$ i $f_2(t)$ imaju Fourrierove transformacije $F_1(j\omega)$ i $F_2(j\omega)$. Prema definiciji, njihova korelacija je:

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} F_2(j\omega) e^{j\omega(t+\tau)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{j\omega t} dt$$

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1^*(j\omega) F_2(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

Spektralna analiza aperiodičnog signala

Teorema o autokorelaciji aperiodičnih funkcija

Korelaciona funkcija $R_{12}(\tau)$ i proizvod $F_1^*(j\omega)F_2(j\omega)$ predstavljaju Fourrierov transformacioni par.

• Specijalni slučaj korelacije kada je $f_1(t)=f_2(t)=f(t)$: ***autokorelaciona funkcija*** aperiodične funkcije $f(t)$:

$$R_{11}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t+\tau)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F^*(j\omega)F(j\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$R_{11}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau}d\omega$$

Kako je $|F(j\omega)|^2 = S_{11}(\omega)$ ***spektralna gustina energije*** aperiodičnog signala $f(t)$, to je:

$$R_{11}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{11}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$S_{11}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R_{11}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

Teorema o autokorelaciji aperiodičnih funkcija:
Spektralna gustina energije aperiodičnog signala $f(t)$ i autokorelaciona funkcija $R_{11}(\tau)$ obrazuju Fourrierov transformacioni par.

Spektralna analiza aperiodičnog signala

Teorema o autokorelaciji aperiodičnih funkcija

Kada je τ =0: $R_{11}(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{11}(\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(j\omega)\right|^2 d\omega$

$$R_{11}(0)=\left[f_{eff}(t)\right]^2$$

čime se definiše *Parsevalova teorema za aperiodične signale.*

Pri tome je autokorelaciona funkcija parna:

$$R_{11}(\tau)=R_{11}(-\tau)$$

- Da bi se istakla razlika između autokorelacione funkcije i korelacije dvije različite funkcije, uvodi se pojam ***unakrsne korelacione funkcije***, a veličina:

$$S_{12}(\omega)=F_1^*(j\omega)F_2(j\omega)$$

se naziva ***spektralna gustina unakrsne energije***, ili ***spektar funkcije*** $R_{12}(\tau)$.

Pri tome, važe relacije:

$$R_{21}(\tau)=R_{12}(-\tau)$$

$$S_{21}(\omega)=F_1(j\omega)F_2^*(j\omega)=S_{12}^*(\omega)$$

Spektralna analiza aperiodičnog signala
Konvolucija aperiodičnih signala

- Izraz čiji je oblik:

$$\rho_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(\tau-t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega)F_2(j\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

naziva se *konvolucijom aperiodičnih funkcija* f_1(t) i f_2(t) ili *konvolucionim integralom.* Konvolucija podrazumijeva sledeća tri koraka:

1. jedna od funkcija se pomjera u vremenu za τ i prelazi u lik simetričan u odnosu na ordinatnu osu
2. tako dobijena funkcija množi se drugom funkcijom
3. računa se integral njihovog proizvoda u neograničenom intervalu

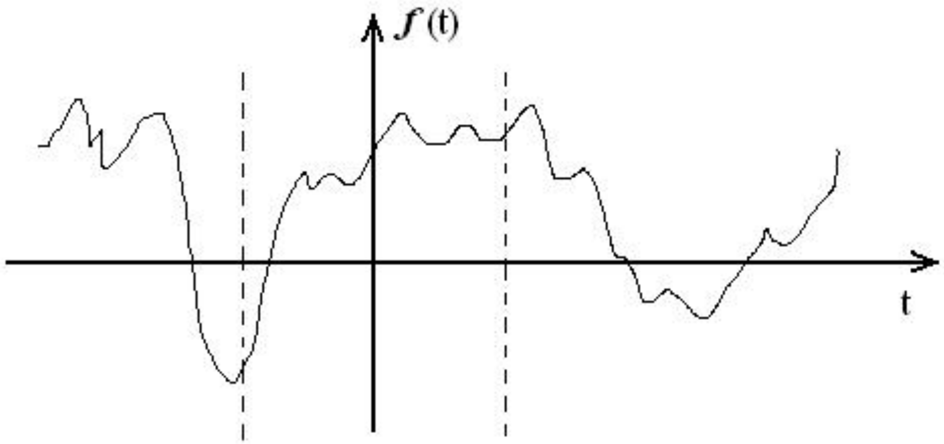
$$\rho_{12}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega)F_2(j\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

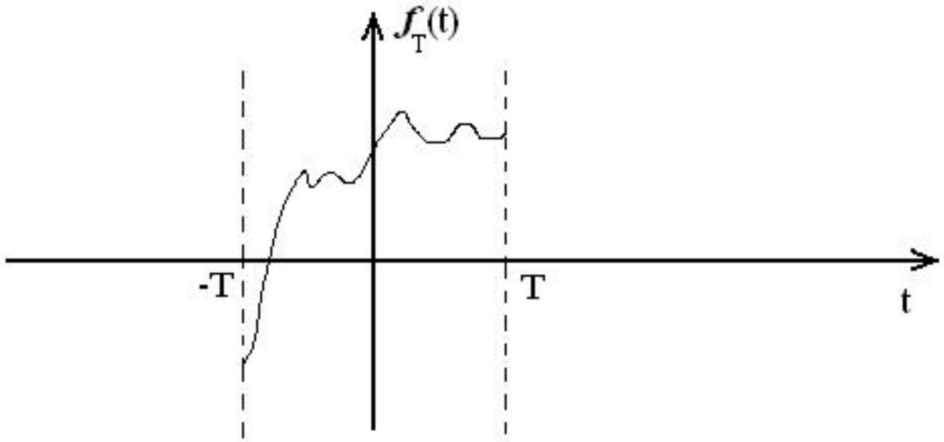
$$F_1(j\omega)F_2(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{12}(\tau)e^{-j\omega\tau}dt$$

Teorema o konvoluciji aperiodičnih funkcija:
Konvolucija dvije aperiodične funkcije $\rho_{12}(\tau)$ i proizvod $F_1(j\omega)\cdot F_2(j\omega)$ obrazuju Fourrierov transformacioni par.

Analiza slučajnih signala

- Slučajne signale nije moguće opisati preciznim analitičkim izrazom u vremenu, pa nije moguće koristiti Fourrierovu analizu. Opisivanje ovakvih signala se vrši metodama teorije statistike.





Da bi se mogli izvesti potrebni zaključci, posmatra se samo jedan dio koji se nalazi u intervalu (-T, T) jednog slučajnog signala:

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t), & \mathrm{t} < |\mathrm{T}| \\ 0 & \mathrm{t} > |\mathrm{T}| \end{cases}$$

Ovako dobijena funkcija je aperiodična, ograničena, pa je njena Fourrierova transformacija:

$$F_T(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_T(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$F_T(j\omega) = \int_{-T}^{T} f_T(t) e^{-j\omega t} dt$$

Analiza slučajnih signala

Srednja snaga slučajnog signala služi kao parametar za njegovo opisivanje. Definiše se na sledeći način:

- Za ograničenu funkciju $f_T(t)$ snaga se definiše kao:

$$P_{srT} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_T^2(t)dt$$

Kako je $f(t)=f_T(t)$ kada $T\rightarrow\infty$, to je:

$$P_{sr} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_T^2(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_T(j\omega)F_T^*(j\omega)d\omega$$

$$P_{sr} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|F_T(j\omega)\right|^2}{2T}d\omega$$

Shodno prethodnim razmatranjima, ako se označi veličina:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\left|F_T(j\omega)\right|^2}{2T} = S_{11}(\omega)$$

što predstavlja spektralnu gustinu srednje snage slučajnog signala $f(t)$, dobija se:

$$P_{sr} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{11}(\omega)d\omega$$

Analiza slučajnih signala

Autokorelaciona funkcija slučajnog signala:

$$R_{T11}(\tau)=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_T(t)f_T(t+\tau)dt=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F_T(j\omega)\right|^2 e^{j\omega\tau}d\omega$$

Za granični slučaj kada T→∞:

$$R_{11}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_T(t)f_T(t+\tau)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|F_T(j\omega)\right|^2}{2T}e^{j\omega\tau}d\omega$$

Uz uvedenu oznaku za spektralnu gustinu srednje snage slučajnog signala *f*(t), važi:

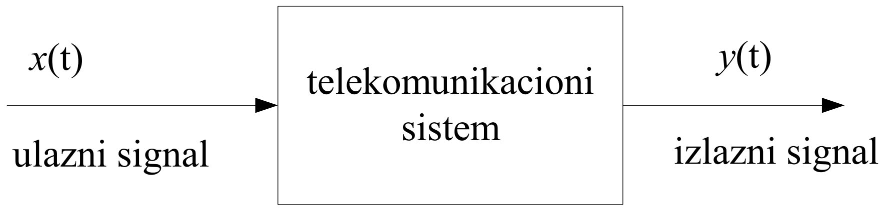
$$R_{11}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{11}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$S_{11}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{11}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

što predstavlja Wiener-Hinchin-ovu teoremu za slučajne signale: Autokorelaciona funkcija slučajnog signala i njena spektralna gustina srednje snage predstavljaju Fourrierov transformacioni par.

Prenos signala

- Osnovna uloga spektralne analize je da se vremenska funkcija, koja opisuje signal, predstavi u domenu učestanosti podesno izabranim parametrima kako bi se omogućilo analitičko praćenje prenosa signala telekomunikacionim sistemima.
- Na taj način se stvaraju uslovi za utvrdjivanje nivoa tačnosti u prenosu signala, odnosno kvaliteta sa kojim se odredjenim sistemom prenose informacije.
- Eventualne promjene u signalu tokom njegovog prenosa se utvrdjuju na osnovu uporedjivanja signala na ulazu u sistem (pobuda) sa signalom na izlazu iz sistema (odziv).
- Upravo primjena spektralne analize omogućava ovo uporedjenje na relativno jednostavan način, odnosno nalaženje medjusobnog odnosa odziva i pobude sistema.



Prenos signala

Veliki broj sklopova telekomunikacionih sistema su po svom opštem karakteru *linearne mreže sa konstantnim parametrima*:

- *mreže sa konstantnim parametrima* - mreže koje imaju osobinu da ako pobudnom signalu *x*(t) odgovara izlazni signal *y*(t), onda pobudnom signalu *x*(t+τ) odgovara izlazni signal *y*(t+τ). (Ove mreže se nazivaju i vremenski invarijantne mreže).

- linearne mreže - mreže koje imaju osobinu da, ako se za pobudni signal x_i(t) dobija izlazni signal y_i(t), onda ulazni signal oblika:

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i(t)=a_1x_1(t)+a_2x_2(t)+\ldots+a_nx_n(t)$$

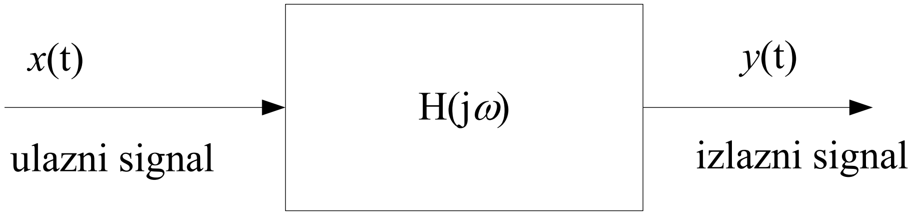
dovodi do izlaznog signala oblika:

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n} a_i y_i(t)=a_1y_1(t)+a_2y_2(t)+\ldots+a_ny_n(t)$$

Osnovna osobina linearnih mreža sa konstantnim parametrima je da se u njima **ne generišu novi harmonici signala tokom prenosa**, tj. <u>sve promjene na prenošenom signalu se dešavaju na nivou njegovih amplituda i faza, ali ne i na nivou njegovih učestanosti</u>.

Prenos signala

Prenosna (transfer) funkcija linearnih mreža sa konstantnim parametrima:



$$H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\chi(\omega)}$$

gdje se sa:

- $|H(j\omega)|$ **modeluju promjene amplitude signala**
- $\chi(\omega)$ **modeluju promjene faze signala**
- Odziv sistema (signal na njegovom izlazu) može se odrediti u:

  1. domenu učestanosti ili
  2. domenu vremena

s tim što se u oba slučaja primjenjuje spektralna analiza.

Prenos signala

Nalaženje odziva sistema u domenu učestanosti

1. Ako je ulazni signal x(t) opisan nekom periodičnom vremenskom funkcijom složenog talasnog oblika, onda se Fourrierovom analizom može predstaviti Fourrierovim redom kao suma harmonika (prosto periodičnih funkcija-sinusoida):

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}$$

- Pošto za linearne mreže sa konstantnim parametrima važi zakon superpozicije, to se uticaj mreže na svaku sinusoidalnu komponentu može zasebno posmatrati. Drugim riječima, poznavanje funkcije prenosa H(jω), za sve odgovarajuće vrijednosti ω, omogućava da se pronađu spektralne komponente (harmonici) izlaznog signala

$$Y_n = H(j\omega)X_n = H(jn\omega_0)X_n$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_n e^{jn\omega_0 t}$$

Prenos signala

Nalaženje odziva sistema u domenu učestanosti

2. Ako je ulazni signal opisan nekom aperiodičnom vremenskom funkcijom x(t), i Fourrierova transformacija ove funkcije je X(jω). Tada se signal x(t) može izraziti inverznom transformacijom svog kompleksnog spektra X(jω):

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Izlazni signal u domenu učestanosti, odnosno njegov kompleksni spektar, se nalazi kao:

$$Y(j\omega)=H(j\omega)X(j\omega)$$

Na osnovu prethodnog, i poznavanja prenosne funkcije sistema, analitički izraz za izlazni signal u domenu vremena se dobija kao:

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Prenos signala

Nalaženje odziva sistema u domenu učestanosti

Zaključak: ako je poznat odziv linearne mreže sa konstantnim parametrima čitavom skupu sinusoidalnih pobuda svih mogućih učestanosti, tada se odziv te iste mreže na bilo koji drugi pobudni signal može jednoznačno odrediti.

Za obije klase determinističkih signala, periodične i aperiodične, zahvaljujući harmonijskoj analizi, proučavanje njihovog prenosa svodi se u suštini na poznavanje odziva mreže sinusoidalnoj pobudi, odnosno na poznavanje karakteristika mreže u stacionarnom režimu.

Prenos signala

Nalaženje odziva sistema u domenu učestanosti

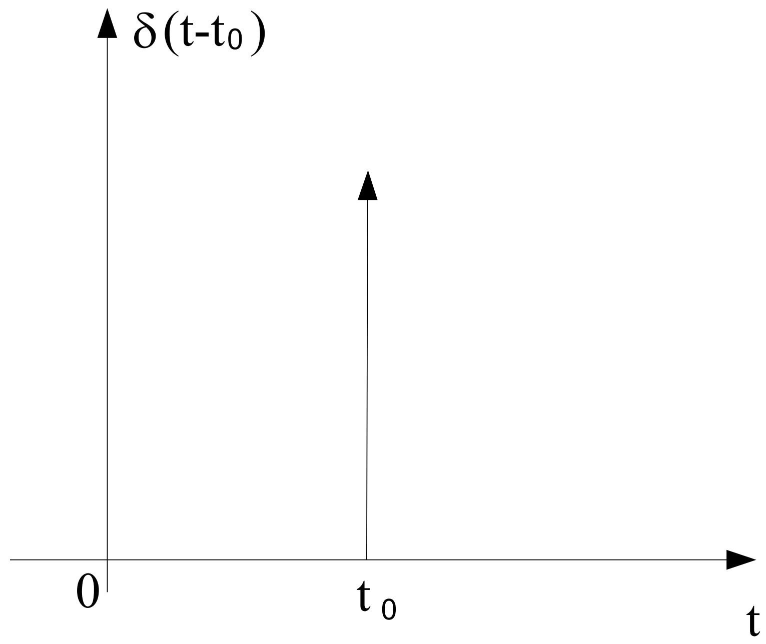
Odziv sistema u domenu učestanosti se nalazi na sledeći način:

1. Definiše se pobuda u domenu učestanosti: X_n ili $X(j\omega)$
2. Odredi se proizvod funkcije prenosa sistema i spektra pobude ($H(j\omega)X_n$ ili $H(j\omega)X(j\omega)$) čime se dobija odziv u domenu učestanosti :Y_n ili $Y(j\omega)$
3. Inverznom Fourrierovom transformacijom određuje se analitički oblik izlaznog signala (odziva) u domenu vremena

Prenos signala

Nalaženje odziva sistema u domenu vremena

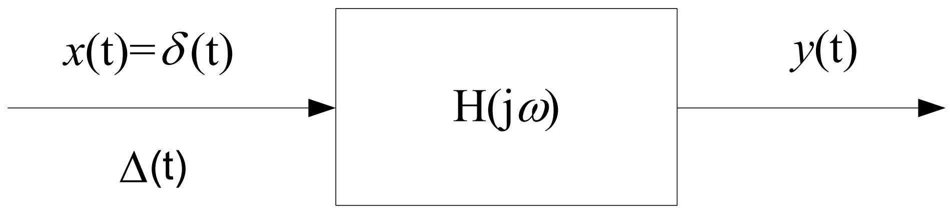
- Transfer (prenosna) funkcija sistema $H(j\omega)$ može da se definiše kao odziv sistema na pobudu u vidu Dirakovog (delta) impulsa.



$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty & t=t_0\\ 0 & t\neq t_0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1$$

$$\Delta(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=1$$



$$Y(j\omega)=H(j\omega)\Delta(j\omega)=H(j\omega)$$

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$y(t)=h(t)$$

Prenos signala

Nalaženje odziva sistema u domenu vremena

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt$$

Zaključak: odziv linearne mreže *h*(t) impulsnoj aperiodičnoj pobudi u vidu delta funkcije i funkcija prenosa mreže H(jω) obrazuju Fourrierov transformacioni par.

h(t) se naziva ***impulsni odziv sistema***. Ukoliko je on poznat može se naći odziv mreže *y*(t) na bilo koju pobudu *x*(t).

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}h(\mu)e^{-j\omega\mu}d\mu d\omega$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\mu)d\mu\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega(t-\mu)}d\omega$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\mu)x(t-\mu)d\mu=\int_{-\infty}^{\infty}x(\mu)h(t-\mu)d\mu$$

Izlazni signal je ***konvolucija*** ulaznog signala i impulsnog odziva sistema!!!

Prenos signala

Osnovne karakteristike signala koji predstavljaju realne poruke

1. SIGNAL GOVORA
   - Opseg učestanosti od 300Hz do 3400Hz usvojen je od strane CCITT-a (ITU) za standardnu širinu kanala za prenos govora.
   - Opsezi (300-2400)Hz i (300-2700)Hz primjenjuju se u vezama redukovanog kvaliteta.

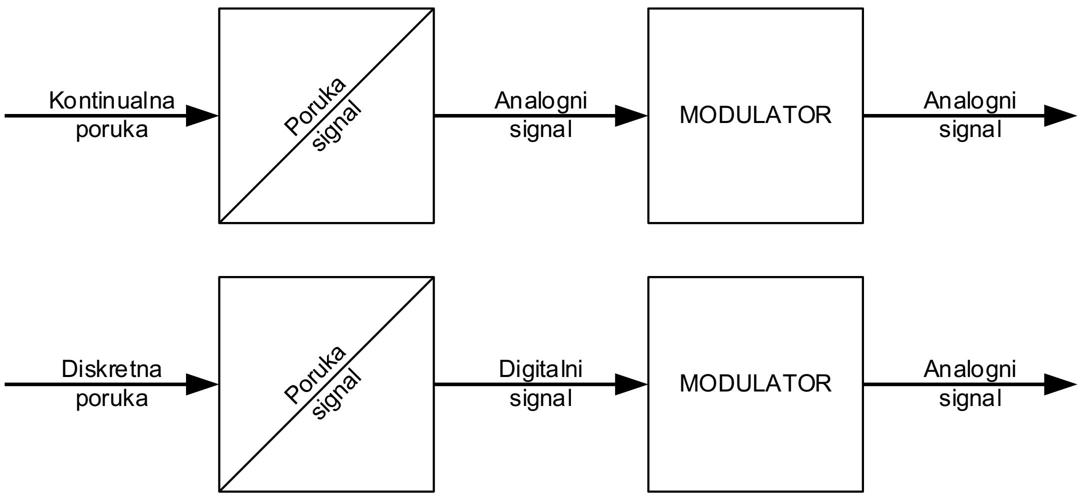
2. SIGNAL MUZIKE
   - Propisana potrebna širina opsega za prenos muzičkog signala je 30-15000Hz.
   - Postoje sistemi čija je širina opsega 50Hz-10 000Hz, ali je u njima kvalitet prenosa nešto lošiji.

3. SIGNALI PODATAKA I TELEGRAFSKI SIGNALI
   - Spektar je povezan sa brzinom signaliziranja

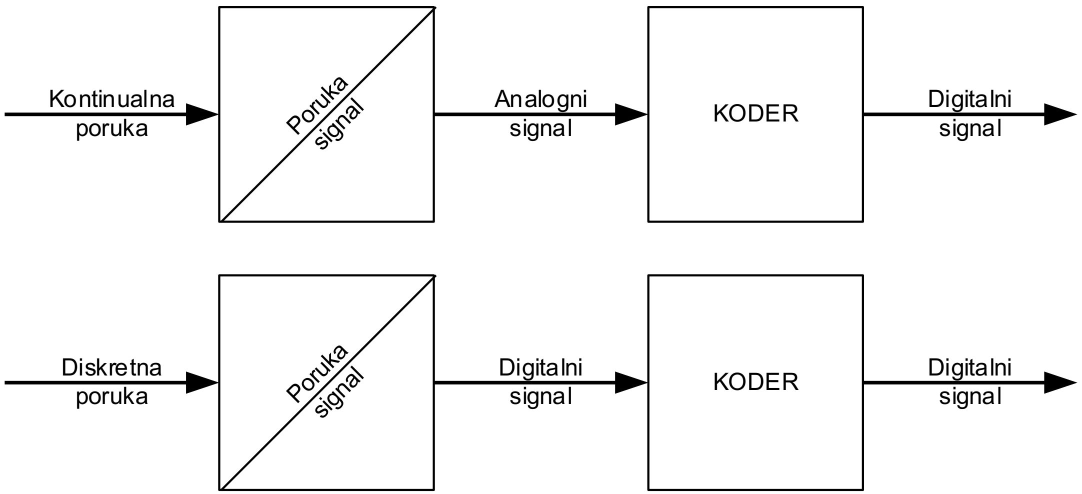
4. TELEVIZIJSKI SIGNAL (SIGNAL POKRETNE SLIKE)
   - Opseg koji zauzima video signal je od 10Hz do 5MHz

Prenos signala

- Analogni signal je moguće pretvoriti u digitalni postupkom **kodiranja** (analogno/digitalna konverzija), dok se postupkom **modulacije** pretvara digitalni signal u analogni.
- U zavisnosti od tipa signala koji se prenosi sistemom, govori se i o <u>dvije vrste prenosa signala</u>: analognom i digitalnom.



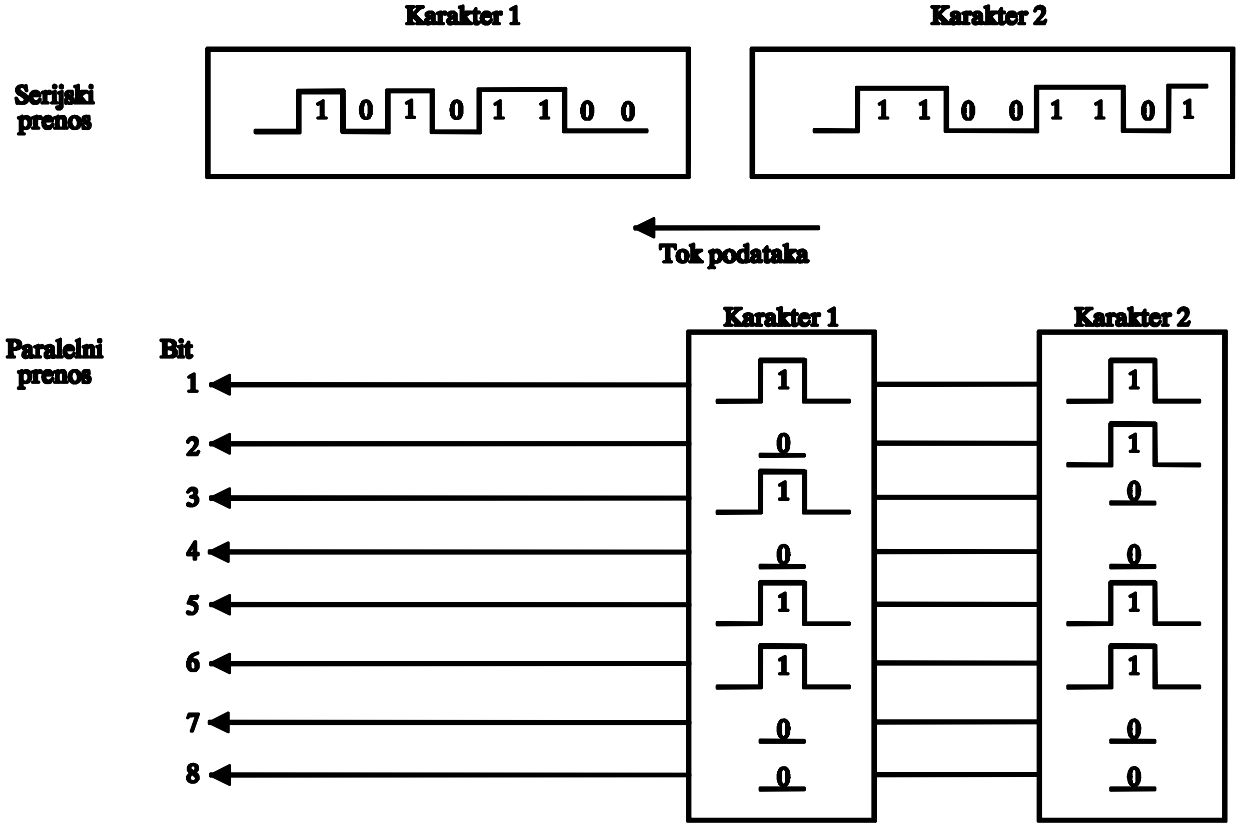
a)



b)

Prenos signala

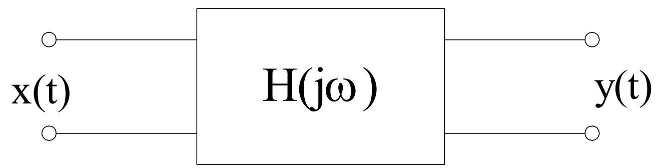
- Kod digitalnih sistema prenosa se može napraviti podjela i u zavisnosti od toga da li se prenos podataka vrši **serijski** (jedan po jedan simbol se prenosi linkom) ili **paralelno** (više simbola se prenosi istovremeno).



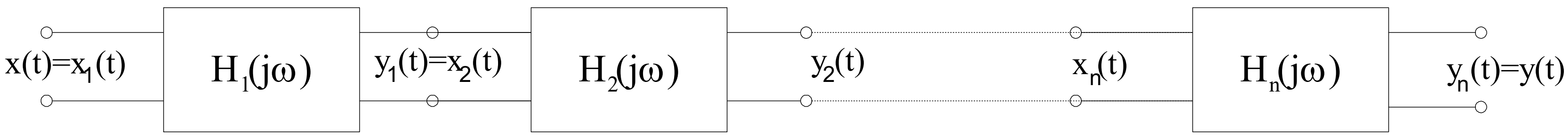
Sistemi prenosa signala

Prenos signala kroz linearne sisteme

- Telekomunikacioni sistemi su sastavljeni od sklopova od kojih svaki pojedinačno predstavlja zasebnu funkcionalnu cjelinu.
- Za svaki sklop mogu se odrediti dva kraja koja predstavljaju ulaz i dva kraja koja predstavljaju izlaz iz sklopa. Dakle, svaki sklop se može smatrati četvorokrajnikom, odnosno četvoropolom.



- Niz ovakvih sklopova, čije su funkcije različite, a koji su vezani kaskadno, obrazuju ***sistem za prenos***:



- Saglasno tome, <u>kompletan sistem za prenos može da se ekvivalentira jednim četvoropolom</u>.

Sistemi prenosa signala

Prenos signala kroz linearne sisteme

- Takav četvoropol, koji predstavlja sistem za prenos, karakteriše **funkcija prenosa H(jω).** Pri tome:
  - Funkcija prenosa matematički modeluje promjene (amplitude i faze) koje nastaju pri prenosu signala kroz sistem.
  - Linearna kola ***ne izazivaju*** promjene učestanosti.

- Ako je signal na ulazu četvoropola $x(t)$ i njegova Fourierova transformacija $X(j\omega)$, onda je Fourierova transformacija signala $y(t)$ na izlazu četvoropola:

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

Sistemi prenosa signala

Prenos signala kroz linearne sisteme

- Kako je funkcija prenosa kompleksna veličina, može se napisati u obliku:

$$H(j\omega) = A(\omega)e^{j\chi(\omega)}$$

A(ω) modeluje promjene amplitude ulaznog signala

χ(ω) modeluje promjene faze ulaznog signala

- Ako ulazni i izlazni signal predstavimo u domenu učestanosti:

$$X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{j\theta_x(\omega)}$$

$$Y(j\omega) = |Y(j\omega)|e^{j\theta_y(\omega)}$$

dobija se:

$$|Y(j\omega)| = A(\omega)|X(j\omega)|$$

$$\theta_y(\omega) = \theta_x(\omega) + \chi(\omega)$$

Sistemi prenosa signala

Prenos signala kroz linearne sisteme

- Moduo A(ω) funkcije prenosa opisuje modifikacije ***spektralne gustine amplituda*** prenošenog signala, dok argument χ(ω) funkcije prenosa opisuju promjene na nivou ***faznih stavova*** pojedinih komponenti prenošenog signala. Stoga se A(ω) naziva ***amplitudska***, a χ(ω) ***fazna karakteristika*** linearnog sistema.
- Za kaskadnu vezu više četvoropola, funkcija prenosa cijelog sistema se odredjuje kao:

$$H(j\omega)=H_1(j\omega)H_2(j\omega)\cdot\ldots\cdot H_n(j\omega)=\prod_{i=1}^{n}H_i(j\omega)$$

$$A(\omega)=A_1(\omega)A_2(\omega)\cdot\ldots\cdot A_n(\omega)=\prod_{i=1}^{n}A_i(\omega)$$

$$\chi(\omega)=\chi_1(\omega)+\chi_2(\omega)+\ldots+\chi_n(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\chi_i(\omega)$$

- Amplitudska karakteristika A(ω) cijelog sistema jednaka je ***proizvodu*** amplitudskih karakteristika pojedinih elemenata (sklopova)
- Fazna karakteristika χ(ω) cijelog sistema jednaka ***sumi*** faznih karakteristika pojedinih elemenata (sklopova)

Sistemi prenosa signala

Idealni sistem

- **Idealni sistem prenosa** – sistem u kome je oblik izlaznog signala $y(t)$ identičan obliku ulaznog signala $x(t)$.

$$y(t)=A\,x(t-t_0)$$

- Riječ je o sistemu koji unosi ***konstantno*** kašnjenje i modifikuje amplitudu u nekom ***konstantnom*** iznosu.
- Na taj način se postiže da preneseni signal ne bude izložen deformacijama koje bi dovele do toga da oblik signala na izlazu takvog sistema (sklopa) ne bude identičan obliku ulaznog signala.

Sistemi prenosa signala

Idealni sistem

- Polazeći od $y(t)=Ax(t-t_0)$, dobija se funkcija prenosa $H(j\omega)$ idealnog sistema za prenos:

$$Y(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} Ax(t-t_0)e^{-j\omega t}dt=A\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega(t_0+\tau)}d\tau$$

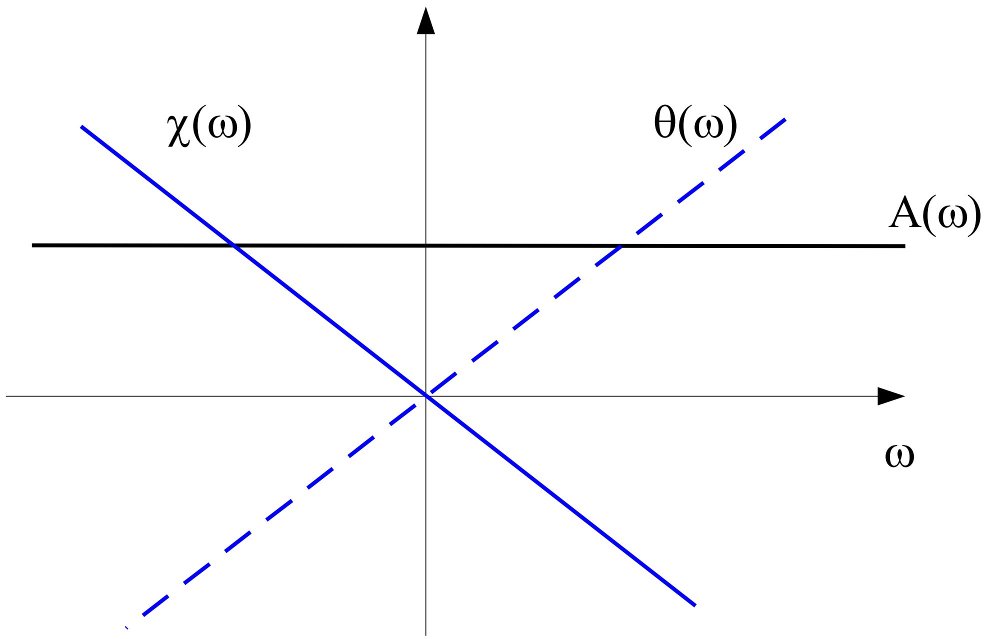
$$Y(j\omega)=Ae^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$Y(j\omega)=Ae^{-j\omega t_0}X(j\omega) \quad\Rightarrow\quad H(j\omega)=Ae^{-j\omega t_0}=A(\omega)e^{j\chi(\omega)}=A(\omega)e^{-j\theta(\omega)}$$

$\theta(\omega)=-\chi(\omega)$ predstavlja karakteristiku ***faznog kašnjenja***.

Sistemi prenosa signala

Idealni sistem



Prenos će biti idealan kroz linearni sistem koji ima **amplitudsku karakteristiku koja ne zavisi od učestanosti:**

$$A(\omega)=A=\text{const.}$$

i faznu karakteristiku koja je linearna funkcija učestanosti:

$$\chi(\omega) = -\omega t_0$$

Sistemi prenosa signala

Idealni sistem

- Navedeni uslov za idealan sistem prenosa može da dodatno proširiti, tako da se idealnim smatra sistem čija je funkcija prenosa oblika:

$$H(j\omega) = Ae^{-j(\omega t_0 \pm n\pi)}, \quad \mathrm{n - cio\ broj}$$

$$|H(j\omega)| = A = const.$$

$$\theta(\omega) = \omega t_0 \pm n\pi$$

- Pri tome, za A>1 sistem unosi ***pojačanje***, a za A<1 ***slabljenje***.

Sistemi prenosa signala

Idealni sistem

- Pri traženju uslova za idealan prenos nije postavljeno nikakvo ograničenje u pogledu širine spektra prenošenog signala $x(t)$. U tom slučaju, za prenos signala bez izobličenja, izvedeni uslovi moraju biti zadovoljeni u *cijelom opsegu učestanosti* ($-\infty<\omega<\infty$).
- Medjutim, sistemi za prenos se realizuju kao sistemi *ograničenog opsega* učestanosti, tako da se govori o *propusnom opsegu* sistema za prenos ili *širini kanala.*
- U takvim uslovima cijeli sistem se ponaša kao *filtar*, tj. komponente signala određenih učestanosti koje se nalaze u njegovom propusnom opsegu propušta sa malim slabljenjem (ili ih u nekim slučajevima i pojačava), dok za ostale komponente van njegovog propusnog opsega unosi veliko slabljenje.

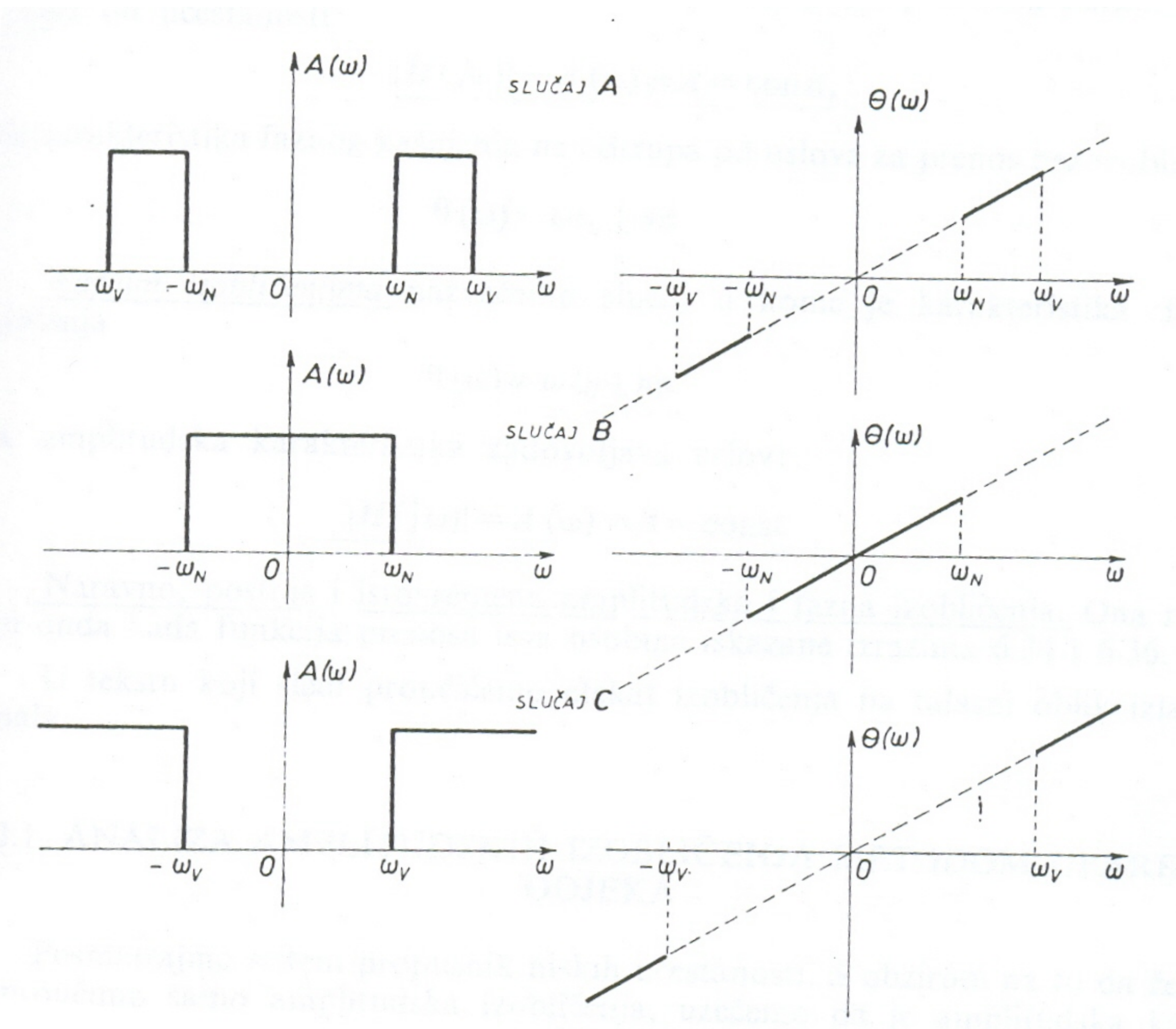
Sistemi prenosa signala

Idealni sistem

- Idealan sistem za prenos u propusnom opsegu ima karakteristike idealnog sistema u propusnom opsegu, dok sve komponente ulaznog signala van tog opsega beskonačno slabi. Sisteme za prenos dijelimo u tri grupe:
  1. propusnike opsega učestanosti (opseg je od ω_N do ω_V)
  2. propusnike niskih učestanosti (opseg je od $\omega_N=0$ do ω_V)
  3. propusnike visokih učestanosti (opseg je od ω_N do $\omega_V \to \infty$)

Sistemi prenosa signala

Idealni sistem



Slika: Amplitudska karakteristika i karakteristika faznog kašnjenja idealnog sistema za prenos:
A - propusnik opsega;
B - propusnik niskih učestanosti;
C - propusnik visokih učestanosti

Sistemi prenosa signala

Idealni sistem

- Funkcija prenosa idealnog sistema za prenos (filtra) je:

$$H(j\omega)=\begin{cases} Ae^{-j(\omega t_0 \pm n\pi)} & \text{u propusnom opsegu} \\ 0 & \text{van propusnog opsega} \end{cases}$$

- Prelaz sa propusnog na nepropusni opseg treba da bude ***trenutan*** (amplitudska karakteristika sa A na 0), pa se javlja problem praktične realizacije ovakvog sistema.

Sistemi prenosa signala

Idealni sistem

Zaključak:

- Linearni sistemi koji bi imali idealnu funkciju prenosa (kao na slikama) *ne mogu se fizički realizovati*:
- Ne mogu se postići ***istovremeno oba uslova za idealan prenos***, pa se zbog toga javljaju izvjesna *izobličenja* signala.
- Iako se mogu samo teorijski analizirati, idealni sistemi prenosa imaju značaj za analizu realnih sistema. Ako se napravi sistem čija amplitudska karakteristika približno zadovoljava uslov idealnog prenosa, dodavanjem određenog sklopa može se korigovati fazna karakteristika da ukupno fazno kašnjenje sistema zadovolji uslov za prenos bez izobličenja (važi i obrnuto).

Sistemi prenosa signala

Izobličenja u prenosu signala

- Pri prenosu signala telekomunikacionim sistemom (ili sklopom) može doći do izobličenja zbog:

  1. odstupanja funkcije prenosa sistema od idealne
  2. nepoklapanja opsega signala i propusnog opsega sistema
  3. kombinacije prethodna dva slučaja.

- Sistem koji ima idealnu funkciju prenosa i čiji se propusni opseg poklapa sa opsegom signala na ulazu nije moguće realizovati. Drugim riječima, fizički nije moguće postići istovremeno oba uslova za idealan prenos.

- Odstupanja od uslova idealnog prenosa uvijek dovode do pojave *izobličenja* u signalu koji se prenosi.

Sistemi prenosa signala

Linearna izobličenja

- Razlikuju se **tri vrste linearnih izobličenja**:

1. **Amplitudska izobličenja** – nastaju u linearnim sistemima u kojima amplitudska karakteristika odstupa od idealne (tj. zavisna je od učestanosti), dok karakteristika faznog kašnjenja ne odstupa od uslova za prenos bez izobličenja:

$$|H(j\omega)| = A(\omega) \neq const, \quad \theta(\omega) = \omega t_0 \pm n\pi$$

2. **Fazna izobličenja** - karakteristika faznog kašnjenja odstupa od idealne, dok amplitudska karakteristika zadovoljava uslov za prenos bez izobličenja: $|H(j\omega)| = A(\omega) = A = const, \; \theta(\omega) \neq \omega t_0 \pm n\pi$

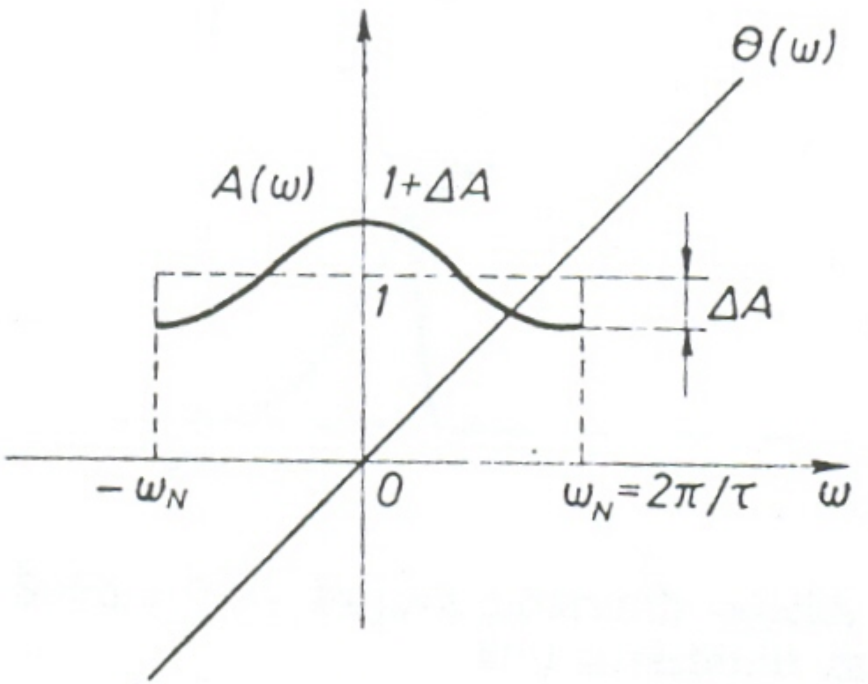
3. **Kombinovana izobličenja** – i amplitudska karakteristika i karakteristika faznog kašnjenja odstupaju od idealne:

$$|H(j\omega)| = A(\omega) \neq const, \; \theta(\omega) \neq \omega t_0 \pm n\pi$$

Sitemi prenosa signala

Analiza amplitudskih izobličenja

- Neka se posmatra sistem propusnik niskih učestanosti.
- Kako bi se proučio uticaj samo ***amplitudskih*** izobličenja, neka amplitudska karakteristika odstupa od idealne, tj. zavisi od učestanosti, a karakteristika faznog kašnjenja je linearna, tj:



$$A(\omega)=\begin{cases}1+\Delta A\cos\frac{\tau}{2}\omega & \text{za } |\omega|<\frac{2\pi}{\tau}=\omega_N\\ 0 & \text{za } |\omega|>\frac{2\pi}{\tau}=\omega_N\end{cases}$$

$$\theta(\omega)=\omega t_0$$

- Amplitudska karakterisitika je uvijek ***parna funkcija*** učestanosti.

Sitemi prenosa signala

Analiza amplitudskih izobličenja

- Neka ulazni signal ima ograničen spektar u opsegu učestanosti od ω=0 do $\omega=\omega_N$ (poklapa se sa propusnim opsegom sistema). Tada će izobličenja izlaznog signala biti isključivo uzrokovana neidealnošću amplitudske karakteristike.
- U tim uslovima, kompleksni spektar izlaznog signala je:

$$Y(j\omega)=H(j\omega)X(j\omega)=\left(1+\Delta A\cos\frac{\tau}{2}\omega\right)e^{-j\omega t_0}X(j\omega)=$$

$$Y(j\omega)=X(j\omega)\left(e^{-j\omega t_0}+\frac{\Delta A}{2}e^{-j\omega\left(t_0-\frac{\tau}{2}\right)}+\frac{\Delta A}{2}e^{-j\omega\left(t_0+\frac{\tau}{2}\right)}\right)$$

Sitemi prenosa signala

Analiza amplitudskih izobličenja

pa se dobija izlazni signal $y(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$y(t) = x(t - t_0) + \frac{1}{2}\Delta A x\left(t - t_0 + \frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{2}\Delta A x\left(t - t_0 - \frac{\tau}{2}\right)$$

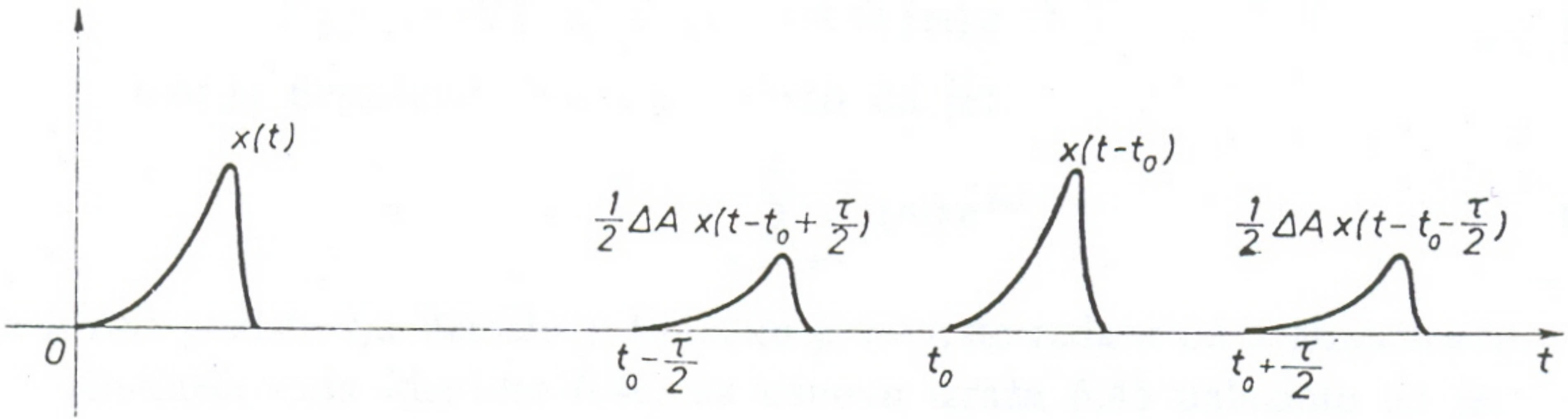
Sitemi prenosa signala

Analiza amplitudskih izobličenja

- Očigledno je da se izraz za izlazni signal sastoji iz tri člana:
  - poslati signal koji u vremenu kasni za t_0
  - drugi i treći član predstavljaju nove signale koji su se pojavili na izlazu iz sistema zbog amplitudskog izobličenja. Njihov talasni oblik je sličan originalnom, samo je amplituda pomnožena koeficijentom $(1/2)\Delta A$, a fazno su pomjereni za $t_0-\tau/2$ i $t_0+\tau/2$. Javljaju se u paru, lijevo i desno oko prenošenog signala $x(t-t_0)$, pa se nazivaju ***upareni odjeci.***

Sitemi prenosa signala

Analiza amplitudskih izobličenja



Slika: Pojava uparenih odjeka nastalih uslijed amplitudskih izobličenja prenošenog signala x(t) u sistemu sa navedenom funkcijom prenosa

Sitemi prenosa signala

Analiza amplitudskih izobličenja

- U prethodnoj analizi je pretpostavljen jedan specifičan oblik amplitudske karakteristike $A(\omega)$:

$$A(\omega)=\begin{cases}1+\Delta A\cos\dfrac{\tau}{2}\omega & \text{za } |\omega|<\dfrac{2\pi}{\tau}=\omega_N\\[2ex] 0 & \text{za } |\omega|>\dfrac{2\pi}{\tau}=\omega_N\end{cases}$$

$$\theta(\omega)=\omega t_0$$

Sitemi prenosa signala

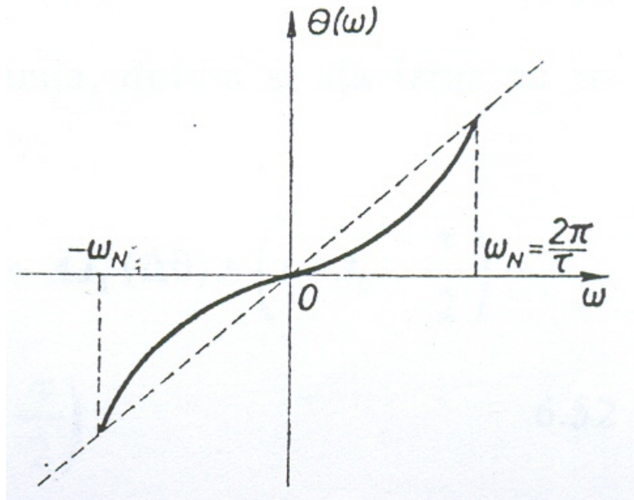
Analiza amplitudskih izobličenja

- Kako je amplitudska karakteristika ***parna*** funkcija, bilo koji drugačiji oblik zavisnosti *A* od učestanosti može da se razvije u Fourrierov red u kome će se javiti ***kosinusni*** članovi.
  - Kako je riječ o linearnim sistemima, važiće princip superpozicije, tj. svaki kosinusni član iz razvoja amplitudske karakteristike u red će izazvati pojavu po dva uparena odjeka lijevo i desno od signala $x(t-t_0)$.

Sistemi prenosa signala

Analiza faznih izobličenja

- Neka sistem propusnik niskih učestanosti ima amplitudska karakteristika koja ne zavisi od učestanosti, a karakteristika faznog kašnjenja nije linearna.



- Pošto je θ(ω) uvijek neparna funkcija od ω, neka fazna karakteristika ima sledeći oblik:

$$\theta(\omega) = \omega t_0 - \Delta\theta \sin\frac{\tau}{2}\omega$$

$$A(\omega) = |H(j\omega)| = A = const. \quad \text{za } |\omega| < \omega_N$$

Sistemi prenosa signala

Analiza faznih izobličenja

- Uz pretpostavku da se spektar ulaznog signala poklapa sa širinom propusnog opsega sistema (što znači da izobličenja nastaju samo usled nelinearnosti fazne karakteristike), spektar izlaznog signala će biti:

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = AX(j\omega)e^{-j\left(\omega t_0 - \Delta\theta \sin\frac{\tau}{2}\omega\right)}$$

- Koristeći isti pristup kao i u slučaju neidealne amplitudske karakteristike sistema prenosa, uz korišćenje teorije Besselovih funkcija, dobija se sledeći oblik izlaznog signala:

$$y(t) = Ax(t - t_0) + \frac{A}{2}\Delta\theta \cdot x\left(t - t_0 + \frac{\tau}{2}\right) - \frac{A}{2}\Delta\theta \cdot x\left(t - t_0 - \frac{\tau}{2}\right)$$

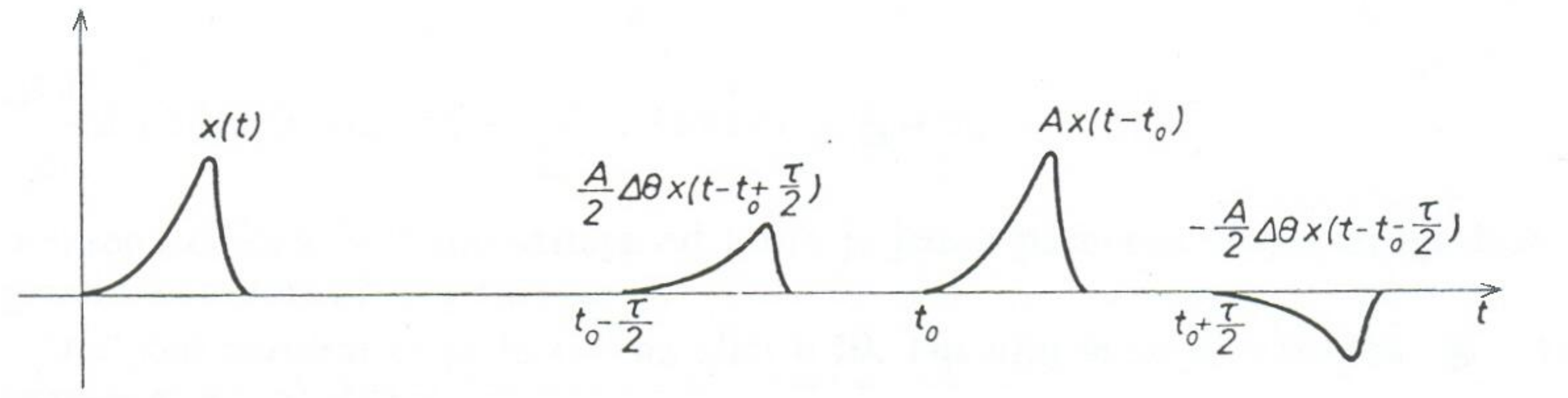
Sistemi prenosa signala

Analiza faznih izobličenja

- Uz učinjene pretpostavke dobija se odziv koji ima tri komponente:

✓ komponenta $x(t-t_0)$ koja bi postojala u slučaju idealnog sistema prenosa

✓ dva člana – ***upareni odjeci***, lijevo i desno od glavne komponente, pri čemu desni odjek ima fazni pomeraj od π.



Slika: Pojava uparenih odjeka nastalih usled faznih izobličenja prenošenog signala x(t) u sistemu za pretpostavljenu funkciju prenosa

Sistemi prenosa signala

Analiza faznih izobličenja

- Ovaj slučaj se može generalizovati i za bilo koju proizvoljnu funkciju faznog kašnjenja. Kako je ona uvijek ***neparna***, može da se razvije u Fourrierov red koji sadrži samo ***sinusne*** članove, i svaki od njih će dati par odjeka. Njihovom superpozicijom se dobija talasni oblik izobličenog izlaznog signala $y(t)$.

Sistemi prenosa signala

Uticaj širine propusnog opsega idealnog sistema za prenos na talasni oblike prenošenog signala

- Osnovna pretpostavka u razmatranjima idealnih sistema za prenos bila je da signal ima ograničen spektar i da se granice spektra signala ***poklapaju sa graničnim učestanostima sistema za prenos***.

- Neka se razmatra situacija kada se signal prenosi kroz idealan linearni sistem pri čemu gore navedeni uslov nije ispunjen (odnosno propusni opseg sistema je manji od širine spektra signala).

1. PROPUSNIK NISKIH UČESTANOSTI

- Neka je idealan sistem za prenos koji propušta samo komponente niskih učestanosti. Njegova funkcija prenosa je data izrazom:

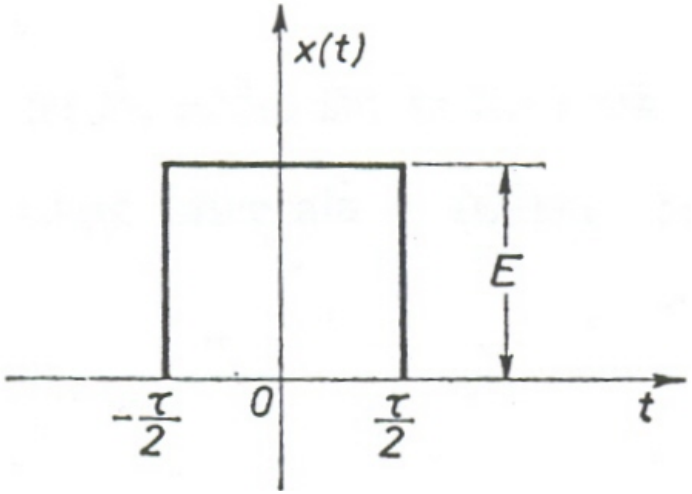
$$H(j\omega) = A(\omega)e^{-j\theta(\omega)}$$

$$A(\omega) = \begin{cases} A = const & |\omega| < \omega_N \\ 0 & |\omega| > \omega_N \end{cases}, \quad \theta(\omega) = \omega t_0$$

Sistemi prenosa signala

Uticaj širine propusnog opsega idealnog sistema za prenos na talasni oblike prenošenog signala

- Neka na ulaz sistema dolazi pravougaoni impuls:



$$X(j\omega) = \tau E \frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}$$

$$Y(j\omega) = \begin{cases} \tau E \dfrac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} A e^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_N \\ 0 & |\omega| > \omega_N \end{cases}$$

Sistemi prenosa signala

Uticaj širine propusnog opsega idealnog sistema za prenos na talasni oblike prenošenog signala

$$y(t)=\frac{AE\tau}{2\pi}\int_{-\omega_N}^{\omega_N}\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}\cos\omega(t-t_0)d\omega=\frac{AE\tau}{2\pi}\int_{-\omega_N}^{\omega_N}\left(\frac{\sin\omega\left(t-t_0+\frac{\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}}-\frac{\sin\omega\left(t-t_0-\frac{\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}}\right)d\omega$$

$$y(t)=\frac{AE}{\pi}\int_{0}^{\omega_N\left(t-t_0+\frac{\tau}{2}\right)}\frac{\sin x}{x}dx-\frac{AE}{\pi}\int_{0}^{\omega_N\left(t-t_0-\frac{\tau}{2}\right)}\frac{\sin x}{x}dx$$

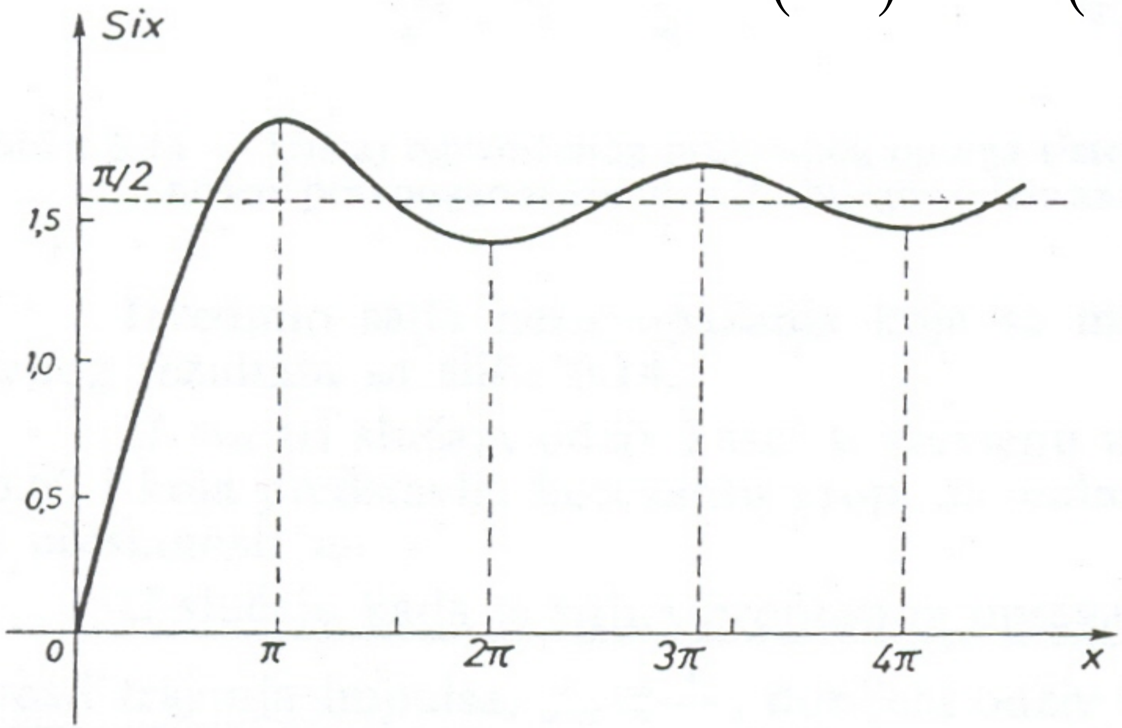
Sistemi prenosa signala

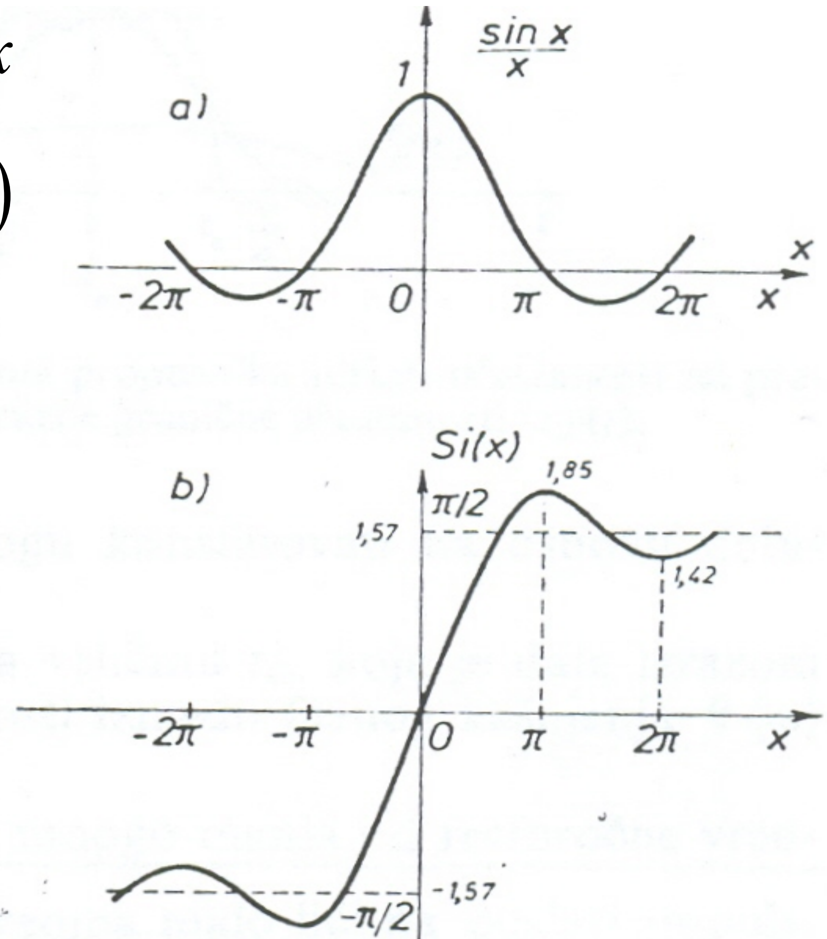
Uticaj širine propusnog opsega idealnog sistema za prenos na talasni oblike prenošenog signala

- Integral funkcije *sinx/x* ne može da se riješi u zatvorenoj formi, tako da se definiše funkcija ***sinus integralni od x***:

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{x} dx$$

$$Si(-x) = -Si(x)$$





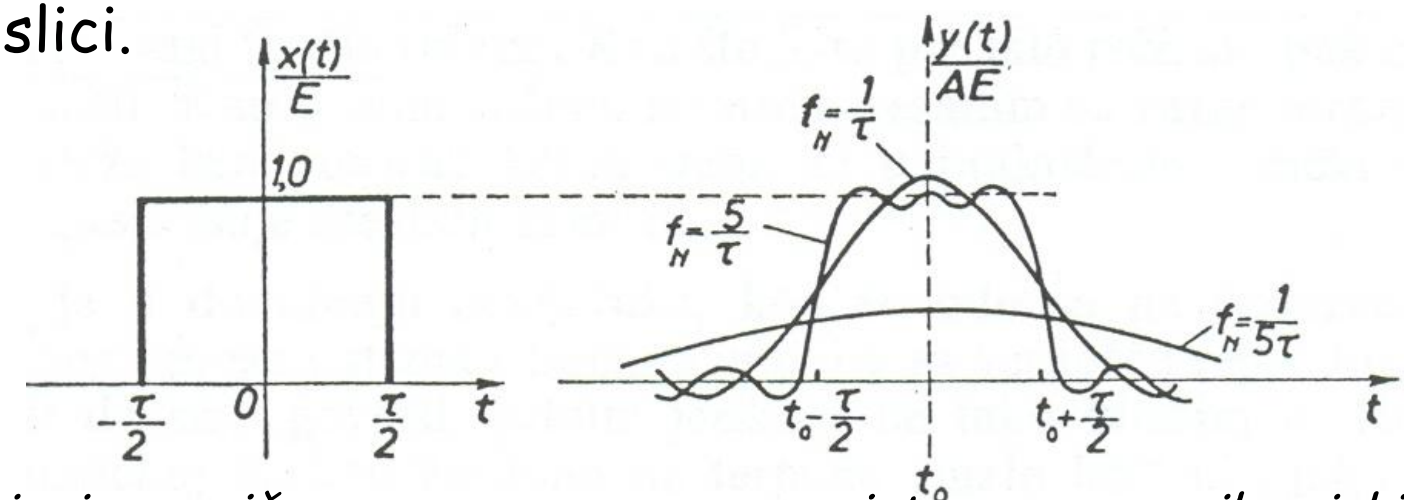
Sistemi prenosa signala

Uticaj širine propusnog opsega idealnog sistema za prenos na talasni oblike prenošenog signala

- Prema tome:

$$y(t)=\frac{AE}{\pi}\left\{Si\left[\omega_N\left(t-t_0+\frac{\tau}{2}\right)\right]-Si\left[\omega_N\left(t-t_0-\frac{\tau}{2}\right)\right]\right\}$$

- Za tri različite vrijednosti granične učestanosti $f_N=\omega_N/2\pi$ (f_N<<$1/\tau$, $f_N=1/\tau$ i f_N>>$1/\tau$), talasni oblici izlaznog signala prikazani su na slici.



Slika: Uticaj ograničenog propusnog opsega sistema propusnika niskih učestanosti na prenošeni pravougaoni impuls x(t) i njegov odziv y(t) za razne granične učestanosti

Sistemi prenosa signala

Uticaj širine propusnog opsega idealnog sistema za prenos na talasni oblike prenošenog signala

Na osnovu rezultata prikazanih na slici, mogu se izvesti sledeći zaključci:

- U sva tri slučaja odziv ***kasni u vremenu*** za veličinu t_0 određenu faznim kašnjenjem koje unosi sistem za prenos.
- U slučaju kada je širina propusnog opsega znatno manja od recipročne vrijednosti trajanja impulsa ($f_N \ll 1/\tau$), dobijeni odziv ima veoma malo sličnosti sa poslatim impulsom (*izobličenje je vrlo veliko*).
- U slučaju kada je širina propusnog opsega jednaka recipročnoj vrijednosti trajanja impulsa ($f_N = 1/\tau$), dobijeni odziv omogućava da se prepozna da je bio poslat impuls i, relativno uzevši, postoji značajna sličnost, iako je talasni oblik odziva daleko od toga da bude pravougaonik.

Sistemi prenosa signala

Uticaj širine propusnog opsega idealnog sistema za prenos na talasni oblike prenošenog signala

U slučaju kada je širina propusnog opsega znatno veća od recipročne vrijednosti trajanja impulsa (f_N>>1/τ), dobijeni odziv ima značajno veći stepen sličnosti sa poslatim pravougaonim impulsom.
- Trenutak u kome se završava ulazni signal je t=τ/2, dok je izlazni signal traje beskonačno t$\rightarrow -\infty$. Ovakav rezultat ukazuje na neku nepravilnost. *Ne može da postoji odziv na izlazu, a da ne postoji pobudni signal na ulazu u sistem.*

✓ Zaključak:
Idealan sistem propusnik niskih učestanosti sa proizvoljno odabranom amplitudskom i faznom karakteristikom *ne može se realizovati*.

Sistemi prenosa signala

Nelinearni sistemi

U opštem slučaju veza između ulaznog signala x(t) i y(t) može se napisati u obliku:

$$y(t) = g[x(t)]$$

Gdje funkcija g() predstavlja karakteristiku posmatranog sistema

Razvojem funkcije y(t) u Maklorenov red dobija se

$$y(t) = g[x(t)] = a_1 x(t) + a_2 x(t)^2 + \cdots + a_n x(t)^n + \cdots$$

a_i su konstantni koeficijenti

U realnim sistemima

$$y(t) = g[x(t)] = a_1 x(t) + a_2 x(t)^2 + \cdots + a_N x(t)^N$$

Koliko iznose koeficijenti za linearni sistem?

$a_n x(t)^n$ predstavlja nelinearno izobličenje n-tog reda

Šta je izobličeni dio signala?

Kako treba da bude realizovan sistem?

Sistemi prenosa signala

Nelinearni sistemi

Harmonijska izobličenja

Neka je na ulazu sistema signal:

$$\mathrm{x}(t) = X cos\omega t$$

tada je

$$\mathrm{y}(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i \, x(t)^i = \sum_{i=1}^{N} a_i \, (X cos\omega t)^i = \sum_{j=0}^{N} (Y_j cos\omega t)^j$$

$$Y_0 = \frac{1}{2} a_2 X^2 + \frac{3}{8} a_4 X^4 + \cdots$$

Jednosmjerna komponenta

$$Y_1 = a_1 X + \frac{3}{4} a_3 X^3 + \frac{5}{8} a_5 X^5 + \cdots$$

$Y_1 cos\omega t$ je linearni odziv

$$Y_2 = \frac{1}{2} a_2 X^2 + \frac{1}{2} a_4 X^4 + \cdots$$

....

Sistemi prenosa signala

Nelinearni sistemi

Harmonijska izobličenja

Ako je $a_1 \gg a_2 \gg a_3 \gg \; a_4 \gg \dots a_i \gg \; \dots$

tada je

$$y(t) = \frac{1}{2}a_2X^2 + a_1Xcos\omega t + \sum_{i=2}^{N}\frac{a_i}{2^{i-1}}X^i\cos(i\omega t)$$

Članovi sume su interferencija koja se naziva nelinearno harmonijsko izobličenje. Ovo izobličenje se opisuje koeficijentom ukupnog harmonijskog izobličenja

$$K = \sqrt{\frac{\sum_{i=2}^{N} Y_{n,eff}^2}{Y_{1,eff}^2}}$$

Šta je ovo fizički?

Sistemi prenosa signala

Nelinearni sistemi

Intermodulaciona izobličenja

Javljaju se kada se nelienarni sistem pobudi sa više prostoperiodičnih signala različitih učestanosti

$$x(t) = \sum_{k=1}^{K} X_k \cos(\omega_k t)$$

tada je

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i \left(\sum_{k=1}^{K} X_k \cos(\omega_k t) \right)^i =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} a_i \left[\sum_{m_1+m_2+\cdots+m_K=i} \frac{i!}{m_1!\, m_2! \ldots m_K\,!} \prod_{k=1}^{K} \left(X_k \cos(\omega_k t) \right)^{m_k} \right]$$

u opštem slučaju dobija se signal čije komponente imaju čestanosti

$$p_1\omega_1 \pm p_2\omega_2 \pm p_3\omega_3 \pm \ldots\ p_K\omega_K, gdje\ p_i \in Z$$

Ove komponenete se nazivaju intermodulacione komponente

Sistemi prenosa signala

Nelinearni sistemi

Intermodulaciona izobličenja
Na primjer ako je

$$\mathrm{x}(t) = \sum_{k=1}^{3} X_k \cos(\omega_k t)$$

Na izlazu će se između ostalih pojaviti komponente čije su učestanosti

$$2\omega_1 \pm \omega_2 \qquad \omega_1 \pm 2\omega_2$$

To su intermodulacione komponente trećeg reda